# *Projections et Perspective*

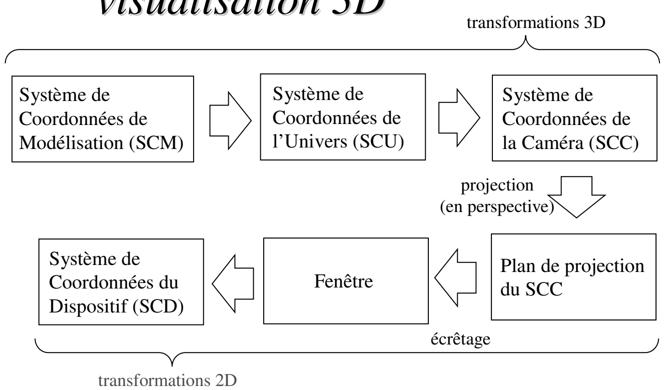
Module 6

## *Points principaux:*

- Transformation de projection
- Volume de visualisation



## *Étapes pour la visualisation 3D*






## *Étapes pour la visualisation 3D*

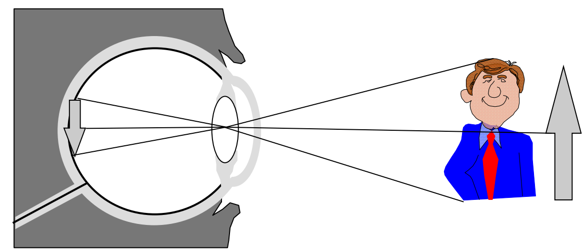
- Transformations affines tridimensionnelles
- Transformation de projection
  - Projection parallèle
  - Projection de la perspective
- Transformation de la fenêtre vers la fenêtre d'affichage
- Tracés des primitives

# *Projections*

- Sous classes de projections
- Implémentation matricielle

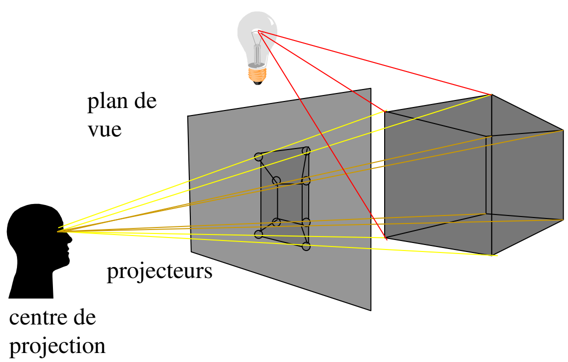


# *Comment voyons-nous le monde?*





# *Projections*






# *Projections géométriques 2D*

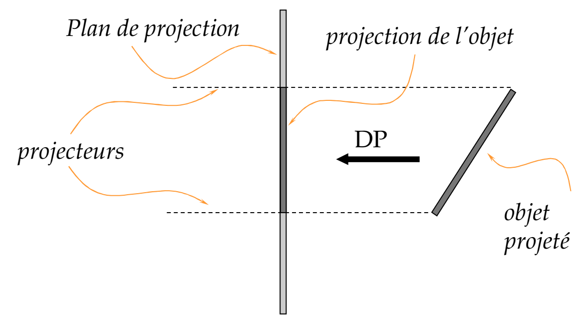
- Les projections des objets sont formées par les intersections de lignes appelées *projecteurs* avec un plan appelé *plan de vue* ou *plan de projection*.
- Les projecteurs sont des lignes partant d'un point arbitrairement appelé *centre de projection (CP)*, en traversant chaque point d'un objet.
- Si les projecteurs sont des lignes droites, et que le plan de projection est plat, la projection est une *projection géométrique 2D.*

## Projections géométriques 2D

- Si le centre de projection (CP) est localisé à un point fini de l'espace tridimensionnel, le résultat est une *projection en perspective.*
- Si le CP est localisé à l'infini, tous les projecteurs sont parallèles et le résultat est une *projection parallèle.*

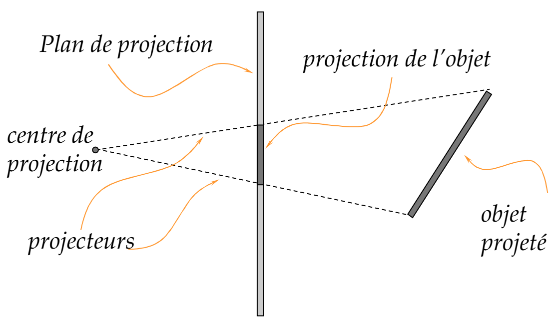


## Projections Parallèles






## Projections en Perspective






## Projection géométrique 2D : Sous classes

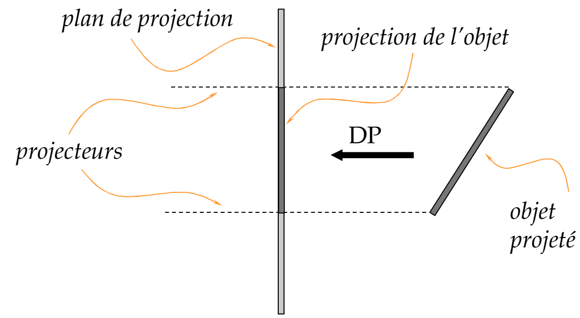
- Projections parallèles
  - Orthographique
    - Haut, côté, devant
    - Axonométrique
      - Trimétrique, Dimétrique, Isométrique,
  - Oblique
    - Cavalier, Cabinet, etc.
- Projections en perspective
  - Un point, deux points, trois points

## Projections parallèles

- Moins réaliste; peut être utilisée pour des mesures exactes
- Les lignes parallèles restent parallèles
- Deux types, dépendant de la relation entre DP et la normale du plan de projection: orthographique et oblique



## Projection orthographique parallèle



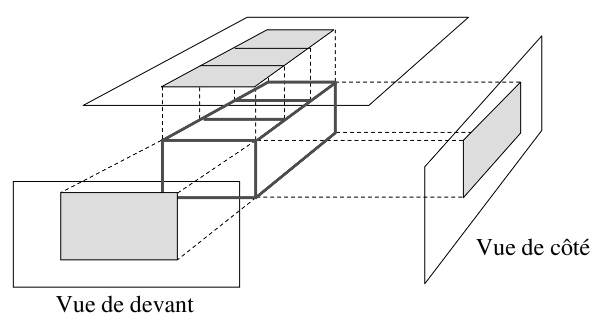



## Projection orthographique parallèle

- DP est perpendiculaire au plan de projection
- Vues de devant, d'en haut, et de côté : plan de projection normal aux axes des coordonnées
  - Projection orthographique axonométrique : le plan de projection n'est pas perpendiculaire aux axes des coordonnés, donc plusieurs facettes de l'objet sont montrées en même temps.



## Projection orthographique parallèle (vue de devant, d'en haut, et de côté)



## Projection orthographique parallèle dans la forme matricielle

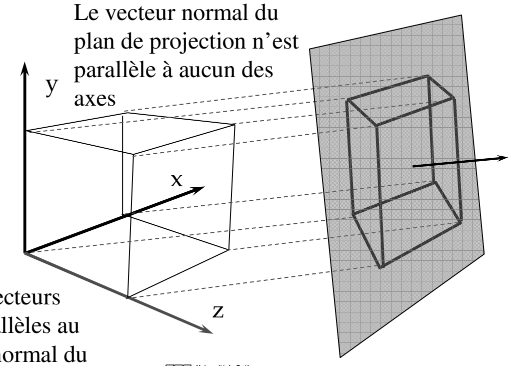
- Vues de devant, d'en haut et de côté : la projection est faite sur un des plans perpendiculaires aux axes des coordonnées en mettant une des coordonnées du point à *0*.

$$[P_z]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad [P_y]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad [P_x]=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Université du Québec
École de technologie supérieure 17

## Projection orthographique parallèle (Projection axonométrique )

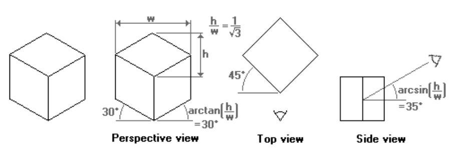
Le vecteur normal du plan de projection n'est parallèle à aucun des axes




Les projecteurs sont parallèles au vecteur normal du plan de projection

Université du Québec
École de technologie supérieure 18

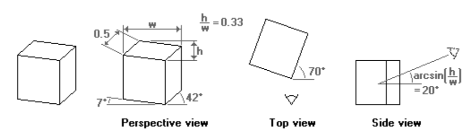
## Projection orthographique parallèle (Projection isométrique )




La projection est obtenue par l'alignement du vecteur de projection (DP) avec la diagonale du cube. Le plan de projection coupe chaque axe des coordonnées à la même distance de l'origine.

Université du Québec
École de technologie supérieure 19

## Projection orthographique parallèle (Projection dimètrique )




Exemple de projection dimètrique.

Université du Québec
École de technologie supérieure 20

## *Projections axonométriques dans la forme matricielle*

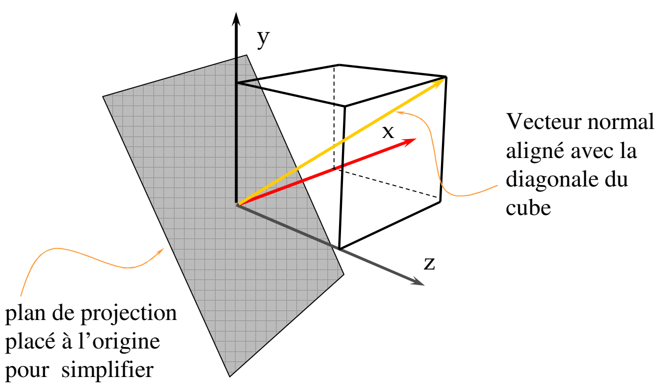
- Construite en manipulant l'objet, en utilisant des *rotations* et des *translations*.
- Après cela, la *projection* sur un des plans coordonnées est appliquée aux points.

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

École de technologie supérieure 21

## *Exemple: Étude du cas de la projection isométrique*

## *Projection orthographique parallèle Projection axonométrique et isométrique*




École de technologie supérieure 23

## *Comment faire la projection?*

- Problème difficile. Comment le simplifier? Choisissons un plan que nous connaissons; le plan XY, par exemple.
- Si nous projetons l'objet sur le plan XY tout ce que nous devons faire est de mettre la coordonnée Z égale à zéro.
- Comment faire en utilisant une matrice?

École de technologie supérieure 24

## *Projection orthographique parallèle dans la forme matricielle*

- Vues de devant, d'en haut et de côté : la projection est faite sur un des plans perpendiculaires aux axes des coordonnées en mettant une des coordonnées du point à *0*.

$$[P_z]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad [P_y]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad [P_x]=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



## *Avons nous besoin des coordonnées homogènes dans ce problème?*

- Le plan passe par l'origine, alors il n'y a pas de translation. Donc, nous n'avons pas besoin de coordonnées homogènes dans ce cas. Cependant, si le plan ne passe pas par l'origine des coordonnées homogènes seront nécessaires à cause des translations.
- La matrice de projection sur le plan XY est alors réduite à :

$$[P_z]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

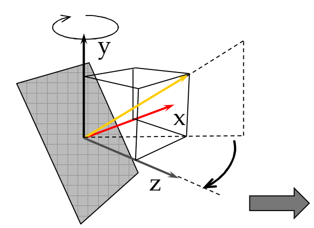


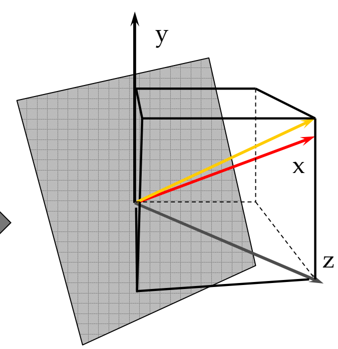
## *Alors, comment?*

- Le plan de projection n'est pas le plan XY!!
- Comment forcer le plan de projection à être le plan XY?
- Nous tournons la scène entière (en incluant le plan) jusqu'à ce que le vecteur normal du plan de projection soit aligné avec l'axe Z.
- Mais comment faire cela?



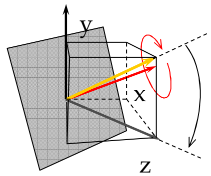
## *Faire coïncider la projection du plan de projection avec le plan des XY. Rotation autour de Y.*

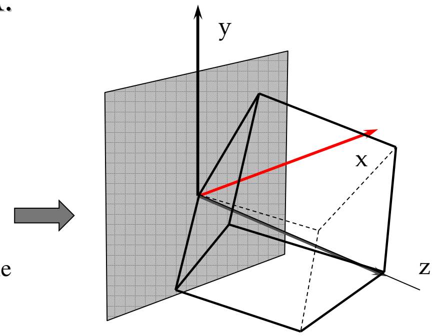



1) Premièrement faire tourner la scène autour de l'axe Y

## *Faire coïncider la projection du plan de projection avec le plan des XY. Rotation autour de X.*




2) Alors la scène tourne autour de l'axe de X

Université du Québec
École de technologie supérieure

29

## *Mais comment trouver les angles?*

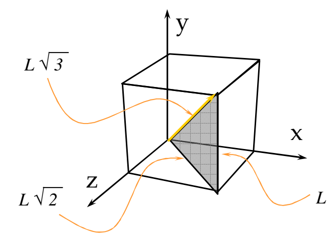
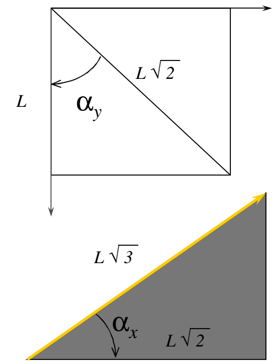



Fig. A




Université du Québec
École de technologie supérieure

30

## *Avons nous besoin des angles?*

- En fait, la matrice seulement possède le cosinus et le sinus des angles.
- Alors, nous avons besoin des angles uniquement pour calculer le cosinus et le sinus des angles.
- Une fois que nous les avons calculés nous pouvons les introduire dans la matrice correspondante…
- Mais attention. La rotation autour de Y se fait dans le sens des aiguilles d'une montre, alors que la rotation autour de X se fait dans le sens contraire des aiguilles d'une montre

Université du Québec
École de technologie supérieure

31

## *Rotation autour des axes coordonnées dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre*

$$X: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_x & \sin\alpha_x & 0 \\ 0 & -\sin\alpha_x & \cos\alpha_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z: \begin{bmatrix} \cos\alpha_z & \sin\alpha_z & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_z & \cos\alpha_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y: \begin{bmatrix} \cos\alpha_y & 0 & -\sin\alpha_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Y: \begin{bmatrix} \cos\alpha_y & 0 & \sin\alpha_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Université du Québec
École de technologie supérieure

32

## *Projections Axonométriques dans la forme matricielle*

- Construite en manipulant l'objet, en utilisant des rotations et des translations.
- Après cela, la projection sur un des plans perpendiculaires aux axes des coordonnées est appliquée aux points.

$$[x \quad y \quad z \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1][\cancel{T}][R_y][R_x]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas nous n'avons ni translations ni perspective



## *Projection isométrique : Solution*

$\cos \alpha_x = \sqrt{2}/\sqrt{3} = \sqrt{6}/3$ $\quad \sin \alpha_x = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$

$\cos \alpha_y = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ $\quad \sin \alpha_y = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

$$R_{yx} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{12}/6 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{12}/6 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{12}/6 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{12}/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & 0 \end{bmatrix}$$

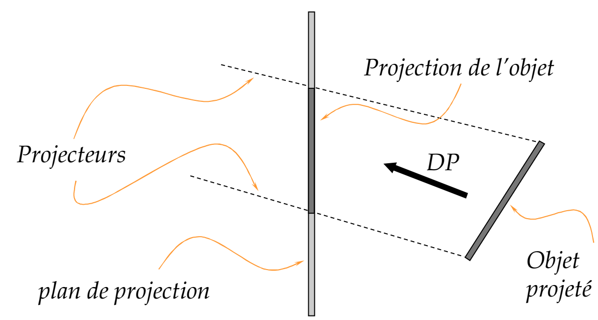


## *Projections Axonométriques : Conclusion*

- Une attention spéciale doit être donnée à l'ordre des rotations;
- Si la transformation s'arrête dans la matrice de projection sur le plan XY, les coordonnées 2D résultantes sont relatives à un nouveau système de coordonnées dont le plan XY coïncide avec le plan de projection; on peut le voir comme si le système de coordonnées tourne aussi.
- Pour obtenir leurs coordonnées 3D correspondantes dans le système de coordonnées précédent, toutes les transformations inverses doivent être multipliées dans l'ordre inverse après la matrice de projection.



## *Projections Obliques*

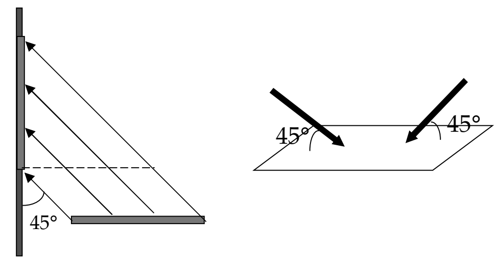


## Projections Obliques

- Direction de la projection n'est pas perpendiculaire au plan de projection
- DP coupe le plan de projection en faisant un *angle oblique* avec celui-ci.
- Une projection *cavalière* est obtenue quand l'angle est de 45º.
- Pour une *projection cabinet* l'angle est de 63.43º.
- La matrice de projection est une combinaison de transformations *d'étirement* et de *projection orthographique*.

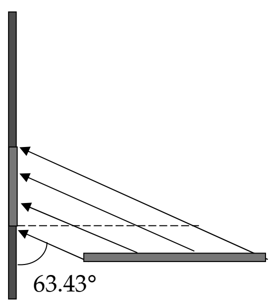
Université du Québec École de technologie supérieure 37

## Projection Cavalière




Université du Québec École de technologie supérieure 38

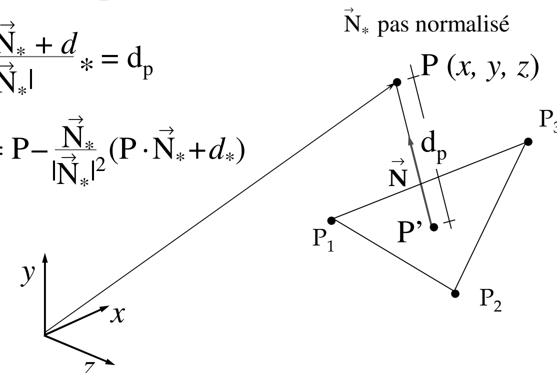
## Projection Cabinet




Université du Québec École de technologie supérieure 39

## Projection orthographique 3D sur un plan utilisant des vecteurs

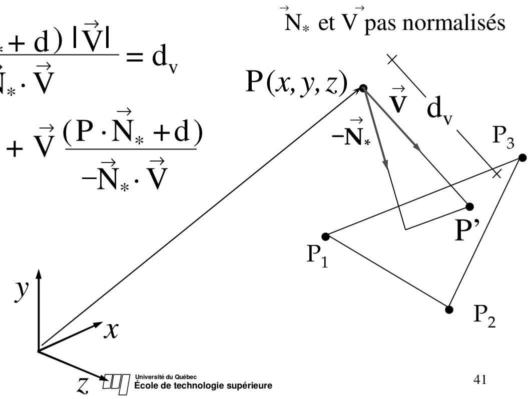
- $\dfrac{P \cdot \vec{N}_* + d_*}{|\vec{N}_*|} = d_p$
- $P' = P - \dfrac{\vec{N}_*}{|\vec{N}_*|^2}(P \cdot \vec{N}_* + d_*)$




Université du Québec École de technologie supérieure 40

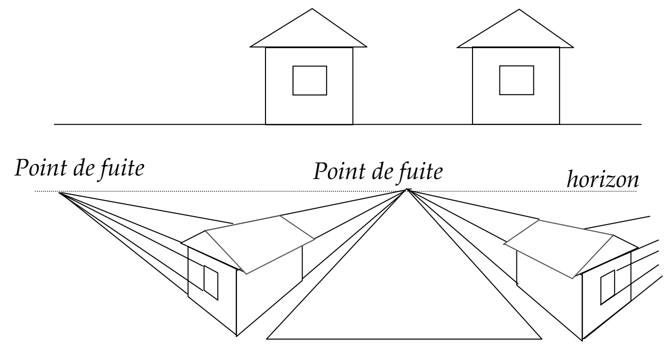
## Projection oblique 3D sur un plan utilisant des vecteurs

- $\dfrac{(P \cdot \vec{N}_* + d)\,|\vec{V}|}{-\vec{N}_* \cdot \vec{V}} = d_v$
- $P' = P + \vec{V}\,\dfrac{(P \cdot \vec{N}_* + d)}{-\vec{N}_* \cdot \vec{V}}$




École de technologie supérieure — 41

## Projection en Perspective




École de technologie supérieure — 42

## Projection en Perspective

- Réaliste: La taille de la projection d'un objet varie inversement avec sa distance de CP ;
- Inutile pour maintenir la forme et les mesures exactes ;
- La projection de n'importe quel ensemble de lignes parallèles non parallèles au plan de projection convergent vers un point de fuite.
- Catégorisé par le nombre de points de fuite principaux

École de technologie supérieure — 43

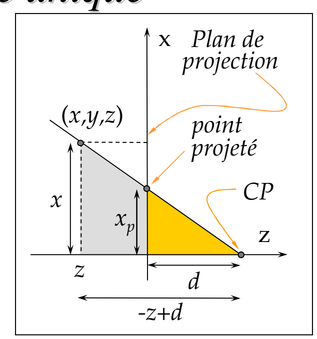
## Calcul d'une perspective de point de fuite unique

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{-z+d} \Rightarrow$$

$$x_p = \frac{x\,d}{-z+d} \Rightarrow$$

$$x_p = \frac{x}{\frac{-z}{d}+1} = \frac{x}{-zr+1}$$

où $r = 1/d$




École de technologie supérieure — 44

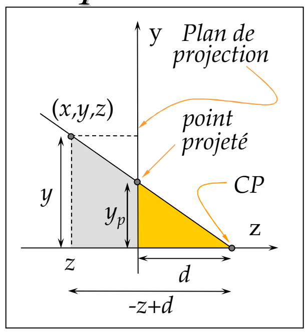
# *Calcul d’une perspective de point de fuite unique*

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{-z+d} \Rightarrow$$

$$y_p = \frac{y\,d}{-z+d} \Rightarrow$$

$$y_p = \frac{y}{\frac{-z}{d}+1} = \frac{y}{-zr+1}$$

où $r = 1/d$




Université du Québec
École de technologie supérieure
45

# *Calcul d’une perspective de point de fuite unique*

Représentation en forme matricielle:

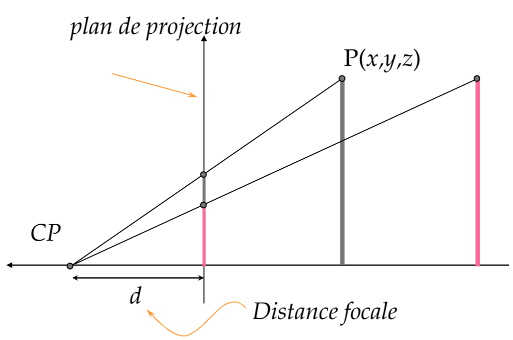
$$x = \frac{x}{-zr+1},\ y = \frac{y}{-zr+1},\ r = 1/d \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & y & z & -rz+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{-rz+1} & \frac{y}{-rz+1} & \frac{z}{-rz+1} & 1 \end{bmatrix}$$

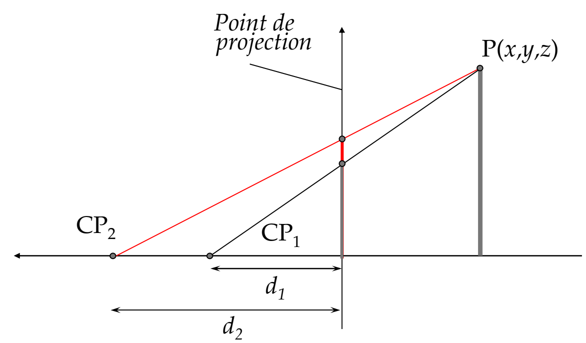
Université du Québec
École de technologie supérieure
46

# *Perspective de point de fuite unique*




Université du Québec
École de technologie supérieure
47

# *Perspective de point de fuite unique*



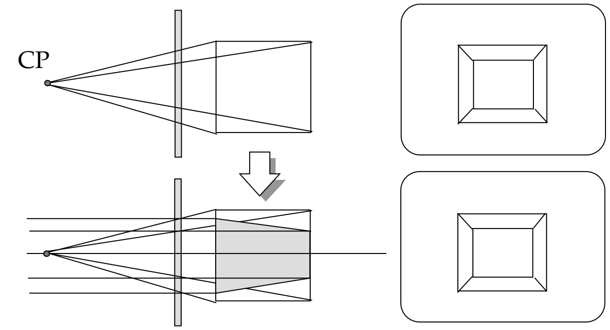

Université du Québec
École de technologie supérieure
48

## Contrôle de la perspective

- Plus *d* est large, plus la projection tend vers une projection parallèle, où la profondeur a un petit effet dans les points projetés et moins de sensation dans la perspective obtenue.
- Plus *d* est petit, plus la projection diverge de la projection parallèle. La profondeur a une influence considérable sur les points projetés à la limite de créer des effets de perspective exagérés.

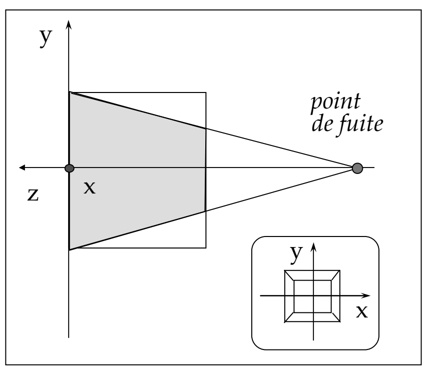
Université du Québec
École de technologie supérieure 49

## Projection en perspective




Université du Québec
École de technologie supérieure 50

## Projection en Perspective




Université du Québec
École de technologie supérieure 51

## Forme matricielle de la projection en perspective

- Une transformation affine est une combinaison de *transformations linéaires*. Pour les transformations affines, la dernière colonne de transformation matricielle générale 4x4 est $[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$.
- Si la dernière colonne est de la forme $[-p\ \ -q\ \ -r\ \ 1]^T$, la *transformation* en *perspective bilinéaire* est définie.

Université du Québec
École de technologie supérieure 52

## Centre de projection et point de fuite

- Le point avec les coordonnées [0 0 1/*r*] est le *centre de projection*.
- Le point avec les coordonnées [0 0 -1/*r*] est le *point* de fuite.
- Les transformations en perspective de deux-points et trois-points ont respectivement 2 et 3 paires de centres de projection et de points de fuite.

Université du Québec
École de technologie supérieure

53

## Perspective de point de fuite unique

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [x \quad y \quad 0 \quad -rz+1] = \left[\frac{x}{-rz+1} \quad \frac{y}{-rz+1} \quad 0 \quad 1\right]$$

Université du Québec
École de technologie supérieure

54

## Perspective de deux points de fuite

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -q \\ 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [x \quad y \quad 0 \quad -qy-rz+1] = \left[\frac{x}{-qy-rz+1} \quad \frac{y}{-qy-rz+1} \quad 0 \quad 1\right]$$

Université du Québec
École de technologie supérieure

55

## Perspective de trois points de fuite

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 & -q \\ 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [x \quad y \quad 0 \quad -px-qy-rz+1] = \left[\frac{x}{-px-qy-rz+1} \quad \frac{y}{-px-qy-rz+1} \quad 0 \quad 1\right]$$

Université du Québec
École de technologie supérieure

56

## *Projection en perspective de trois points de fuite.*

- Trois centres de projections:
  sur l'axe de x [1/p 0 0],
  sur l'axe de y [0 1/q 0], et
  sur l'axe de z [0 0 1/r].
- Trois points de fuite :
  sur l'axe de x [-1/p 0 0],
  sur l'axe de y [0 -1/q 0], et
  sur l'axe de z[0 0 -1/r].

Université du Québec
École de technologie supérieure

57

## *Projections : Sommaire*

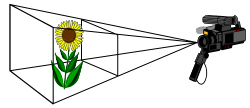
- Projection géométrique plane
- projection parallèle :
  - DP (Direction de Projection)
  - Orthographique et Oblique
- Projection en perspective :
  - CP (Centre de Projection)
  - Projections de point de fuite unique, de deux points et de trois points

Université du Québec
École de technologie supérieure

58

## *Volume de visualisation*

- Limite la portion du monde qui est écrêtée et projetée sur le plan de projection.



- Perspective : pyramide semi-infinie avec sommet au CP et bords passants par les coins de la fenêtre.

Université du Québec
École de technologie supérieure

59

## *Volume de visualisation*

- Le volume de visualisation doit être fini afin de limiter le nombre de primitives projetées sur le volume de visualisation.
- Plans d'écrêtage frontal et arrière.

Université du Québec
École de technologie supérieure

60

## *Visualisation 3D : Sommaire*

- Les projections géométriques planes peuvent être divisées en deux classes: parallèle et perspective
- Les projections en 3D transforment des points 3D dans des points 2D sur un plan de projection.
- La matrice de transformation 4×4 dans la dernière colonne est utilisée pour les projections en perspective. Le volume de visualisation 3D limite la portion du monde qui doit être écrêtée et projetée sur le plan de projection.



## *Exercice 6.1*

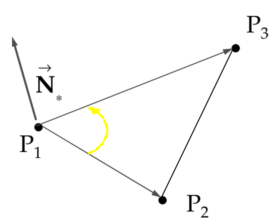
- En utilisant la projection parallèle, projetez le point (13,15,17) sur le plan défini par les points (4,0,0), (0,3,0) et (0,0,1).
- Premièrement utiliser la méthode des vecteurs, puis déterminez les matrices 3D et 2D.
- Utilisez la formule:

$$P' = P - \frac{\vec{N}_*}{|\vec{N}_*|^2}(P \cdot \vec{N}_* + d_*)$$



## *Solution de l'exercice 6.1*

- Points $P_1$, $P_2$ et $P_3$ stockés dans cet ordre
- Pas de normale. On doit la calculer.
- $\vec{N}_* = (P_3 - P_2) \times (P_1 - P_2)$



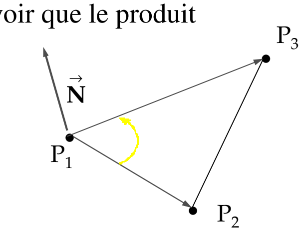



## *Solution de exercice 6.1 : ruses du produit vectoriel*

- $P_1$, $P_2$, et $P_3$ sont par convention stockés dans l'ordre inverse aux aiguilles d'une montre. Pourquoi? Il permet de savoir que le produit vectoriel est

  $(\vec{P}_3 - \vec{P}_2) \times (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$ et

  pas $(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \times (\vec{P}_3 - \vec{P}_2)$




- Dans le produit vectoriel additionnez tous les termes et multipliez chacun d'eux par $(-1)^{r+c}$, r et c sont le rang et la colonne de $\vec{i}$ , $\vec{j}$ et $\vec{k}$

## Solution de l'exercice 6.1

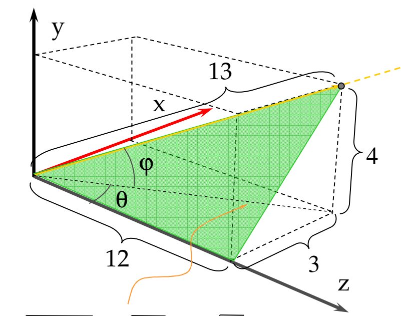
- $P_1(4,0,0)$, $P_2(0,3,0)$, $P_3(0,0,1)$
- $\vec{N}_* = (P_3 - P_2) \times (P_1 - P_2) = |0\ -3\ 1| \times |4\ -3\ 0|$

$$\vec{N}_* = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

- $\vec{N}_* = (3, 4, 12)$, avec norme 13 $|\vec{N}_*|^2 = 169$
  $d_* = -P_3 \cdot N_* = -12 \;\therefore\; P_0 \cdot N_* = (13\cdot3+15\cdot4+17\cdot12) = 303$
  $(P_0 \cdot N_* + d_*)/|N_*|^2 = 291/169$
  $V = N_* \cdot (291/169) = (873/169, 1164/169, 3492/169)$
- $P = (13, 15, 17) - V = (1324/169, 1371/169, -619/169)$

Université du Québec École de technologie supérieure 65

## Exercice 6.1 - Solution matricielle




$\sqrt{9+144} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17} \approx 12.37$

- Cette configuration forme deux triangles rectangles: 3-4-5 et 5-12-13;
- Le sinus et cosinus des angles de rotation peuvent être déduits du diagramme sur la gauche.

Université du Québec École de technologie supérieure 66

## Exercice 6.1 - Solution matricielle

$$\cos\varphi = \frac{3\sqrt{17}}{13} \qquad \sin\varphi = \frac{4}{13}$$

$$\cos\theta = \frac{12}{3\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad \sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$R_{yx} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & 0 & \frac{\sqrt{17}}{17} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} & 0 & \frac{4\sqrt{17}}{17} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{17}}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & \frac{-4}{13} & \frac{3\sqrt{17}}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & -\frac{4\sqrt{17}}{221} & \frac{3}{13} \\ 0 & \frac{3\sqrt{17}}{13} & \frac{4}{13} \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & \frac{12}{13} \end{bmatrix}$$

Université du Québec École de technologie supérieure 67

## Exercice 6.1 - Solution matricielle

- La matrice de projection en 3D peut être résumée par la matrice P ci-dessous, la transformation matricielle finale est M.

$M = \mathbf{T}_- \; P \; \mathbf{T}_+$ (le plan ne passe pas par l'origine, $d_* = -12$)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & -\frac{4\sqrt{17}}{221} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{17}}{13} & \frac{4}{13} & 0 \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & \frac{12}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & 0 & -\frac{\sqrt{17}}{17} & 0 \\ -\frac{4\sqrt{17}}{221} & \frac{3\sqrt{17}}{13} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & 0 \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Université du Québec École de technologie supérieure 68

## *Exercice 6.1 - Solution matricielle*

- En multipliant la matrice de projection sur le plan XY par la première matrice de gauche (comme suggéré avant) on obtient le résultat suivant :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & -\frac{4\sqrt{17}}{221} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{17}}{13} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & 0 & -\frac{\sqrt{17}}{17} & 0 \\ -\frac{4\sqrt{17}}{221} & \frac{3\sqrt{17}}{13} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & 0 \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## *Exercice 6.1 - Solution matricielle*

- Pour la translation on peut utiliser n'importe quel point du plan défini tel que (0,0,1), alors:

$$\mathbf{T}_- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



## *Exercice 6.1 - Solution matricielle*

- Nous multiplierons alors, en premier la matrice $T_+$ comme suggéré précédemment :

$$M = \mathbf{T}_- \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & -\frac{4\sqrt{17}}{221} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{17}}{13} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & 0 & -\frac{\sqrt{17}}{17} & 0 \\ -\frac{4\sqrt{17}}{221} & \frac{3\sqrt{17}}{13} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & 0 \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



## *Exercice 6.1 - Solution matricielle*

- On copie simplement la valeur 1 dans la position correspondante comme montré ci-dessous. Après nous multiplierons les deux « grandes » matrices avant de multiplier $T_-$ :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & -\frac{4\sqrt{17}}{221} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{17}}{13} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & 0 & -\frac{\sqrt{17}}{17} & 0 \\ -\frac{4\sqrt{17}}{221} & \frac{3\sqrt{17}}{13} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & 0 \\ \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Exercice 6.1 - Solution matricielle

- Maintenant on multiplie T_

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{160}{169} & -\frac{12}{169} & -\frac{36}{169} & 0 \\ -\frac{12}{169} & \frac{153}{169} & -\frac{48}{169} & 0 \\ -\frac{36}{169} & -\frac{48}{169} & \frac{25}{169} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

École de technologie supérieure 73

# Exercice 6.1 - Solution matricielle

- En multipliant les points (13,15,17 ) par M, nous obtenons les points projetés ci-après:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{160}{169} & -\frac{12}{169} & -\frac{36}{169} & 0 \\ -\frac{12}{169} & \frac{153}{169} & -\frac{48}{169} & 0 \\ -\frac{36}{169} & -\frac{48}{169} & -\frac{25}{169} & 0 \\ \frac{36}{169} & \frac{48}{169} & \frac{144}{169} & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 13 & 15 & 17 & 1 \end{bmatrix} \cdot M$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1324}{169} & \frac{1371}{169} & \frac{-619}{169} & 1 \end{bmatrix}$$

École de technologie supérieure 74

# Exercice 6.1 – Solution en 2D

- La matrice de projection 2D peut être résumée par la matrice $M_{2d}$ ci-dessous.

$$M_{2d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & -\frac{4\sqrt{17}}{221} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{17}}{13} & \frac{4}{13} & 0 \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & \frac{12}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

École de technologie supérieure 75

# Exercice 6.1 – Solution en 2D

- En multipliant la matrice de projection sur le plan XY en premier par la matrice de gauche (comme suggéré avant) nous obtenons le résultat suivant:

$$M_{2d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & -\frac{4\sqrt{17}}{221} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{17}}{13} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

École de technologie supérieure 76

## Exercice 6.1 – Solution en 2D

- En multipliant le point (13,15,17 ) par $M_{2d}$, nous obtenons le point projeté suivant :

$$M_{2d} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{17}}{17} & -\frac{4\sqrt{17}}{221} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{17}}{13} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{16\sqrt{17}}{221} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{17}}{17} & \frac{16\sqrt{17}}{221} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{2d} = \begin{bmatrix} 13 & 15 & 17 & 1 \end{bmatrix} \cdot M_{2d}$$

$$P_{2d} = \begin{bmatrix} \frac{36\sqrt{17}}{17} & \frac{558\sqrt{17}}{221} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Université du Québec
École de technologie supérieure

77